

Marin Chirciu

INEGALITĂȚI CU LATURI ȘI CU RAZE
ÎN TRIUNGHI
DE LA INIȚIERE LA PERFORMANȚĂ



Editura Paralela 45

Cuprins

	Soluții
Capitolul 1 – Inegalități cu laturile triunghiului	7 156
§ 1. 1. – Identități remarcabile cu laturi	7 156
§ 1. 2. – Inegalități remarcabile cu laturi	23 166
§ 1. 3. – Inegalități cu laturi.....	25 168
§ 1. 4. – Inegalități cu laturi și raze	46 188
§ 1. 5. – Inegalități cu laturi și unghiuri	96 235
§ 1. 6. – Inegalități cu laturi obținute din inegalități algebrice	102 245
Capitolul 2 – Inegalități cu razele cercurilor exînscrie triunghiului	104 247
§ 2. 1. – Identități remarcabile cu raze	104 247
§ 2. 2. – Inegalități remarcabile cu raze	108 252
§ 2. 3. – Inegalități cu raze	109 253
§ 2. 4. – Inegalități cu raze obținute din inegalități algebrice	126 266
<i>Bibliografie</i>	301

Editor: Călin Vlasie

Redactare: Daniel Mitran

Tehnoredactare: Mioara Benza

Pregătire de tipar: Marius Badea

Design copertă: Ionuț Broșțianu

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

CHIRCIU, MARIN

Inegalități cu laturi și cu raze în triunghi : de la inițiere la performanță / Marin Chirciu. - Pitești : Paralela 45, 2017

Conține bibliografie

ISBN 978-973-47-2526-7

51

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ

EDITURA PARALELA 45

Pitești, jud. Argeș, cod 110174, str. Frații Golești 130

Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918

Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 942.

E-mail: comenzi@edituraparelela45.ro

sau accesați www.edituraparelela45.ro

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*

E-mail: tipografie@edituraparelela45.ro

Copyright © Editura Paralela 45, 2017

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.

„Profesorul mediocru vorbește.
Un profesor bun explică.
Un profesor superior demonstrează.
Profesorul măreț inspiră.”

William Arthur Ward

§ 1.1. Identități remarcabile cu laturi

1. $IG^2 = \frac{1}{9}(p^2 + 5r^2 - 16Rr).$

2. $IH^2 = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2.$

3. $OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}.$

4. $OH^2 = 9R^2 + 8Rr + 2r^2 - 2p^2.$

5. $\sum a = 2p.$

6. $\sum bc = p^2 + r^2 + 4Rr.$

7. $\sum a^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr).$

8. $\sum a^3 = 2p(p^2 - 3r^2 - 6Rr).$

9. $\sum a^4 = 2[p^4 - 2p^2(4Rr + 3r^2) + r^2(4R + r)^2].$

10. $\sum a^5 = 2p^5 - 20p^3(Rr + r^2) + 10p(8R^2r^2 + 6Rr^3 + r^4).$

11. $\sum a^6 = p^6 - 3p^4(4Rr - r^2) + 3p^2r^4 + r^3(4R + r)^3.$

12. $\sum a^2b^2 = p^4 - 2p^2(4Rr - r^2) + r^2(4R + r)^2.$

13. $\sum a^3b^3 = p^6 - p^4(12Rr - 3r^2) + 3p^2r^4 + r^3(4R + r)^3.$

14. $2\sum bc - \sum a^2 = 4r(4R - r).$

15. $2\sum b^2c^2 - \sum a^4 = 16r^2p^2 = 16S^2.$

16. $\sum \frac{a}{b+c} = \frac{2(p^2 - r^2 - Rr)}{p^2 + r^2 + 2Rr}.$

17. $\sum \frac{1}{b+c} = \frac{5p^2 + r^2 + 4Rr}{2p(p^2 + r^2 + 2Rr)}.$

18. $\sum \frac{b+c}{a} = \frac{p^2 + r^2 - 2Rr}{2Rr}.$

19. $\sum \frac{1}{a} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4Rrp}.$

- $$20. \sum \frac{(b+c)^2}{bc} = \frac{p^2 + r^2 + 10Rr}{2Rr}.$$
- $$21. \sum \frac{(b+c)^2}{b+c-a} = \frac{2p(R+2r)}{r}.$$
- $$22. \sum \frac{1}{bc} = \frac{1}{2Rr}.$$
- $$23. \sum \frac{1}{a^2} = \frac{p^4 - 2p^2(4Rr - r^2) + r^2(4R+r)^2}{16R^2r^2p^2}.$$
- $$24. \prod (b+c) = 2p(p^2 + r^2 + 2Rr).$$
- $$25. \prod (b+c-a) = 8r^2p.$$
- $$26. \prod (b^2 + c^2) = 2 \left[p^6 - p^4(12Rr - r^2) + p^2(40R^2r^2 + 8Rr^3 - r^4) - r^3(4R+r)^3 \right].$$
- $$27. \sum \frac{1}{b^2 + c^2} = \frac{5p^4 - 2p^2(20Rr + 3r^2) + 5r^2(4R+r)^2}{\prod (b^2 + c^2)}.$$
- $$28. \sum \frac{bc}{b+c} = \frac{p^4 + 2p^2(8Rr + r^2) + r^2(4R+r)^2}{2p(p^2 + r^2 + 2Rr)}.$$
- $$29. \sum \frac{bc}{a} = \frac{p^4 - 2p^2(4Rr - r^2) + r^2(4R+r)^2}{4Rrp}.$$
- $$30. \sum \frac{a}{bc} = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2Rrp}.$$
- $$31. \sum \frac{1}{a(b+c)} = \frac{p^4 + 2p^2(8Rr + r^2) + r^2(4R+r)^2}{8Rrp^2(p^2 + r^2 + 2Rr)}.$$
- $$32. \sum \frac{b+c-a}{a(b+c)} = \frac{p^4 + 2p^2(r^2 - 2Rr) + r^3(4R+r)}{8Rrp^2(p^2 + r^2 + 2Rr)}.$$
- $$33. \sum \frac{(a+b)(a+c)}{bc} = \frac{p^2 - r^2 - Rr}{Rr}.$$
- $$34. \sum \frac{b^2 + c^2}{bc} = \frac{p^2 + r^2 - 2Rr}{2Rr}.$$
- $$35. \sum \frac{a^2}{bc} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{2Rr}.$$
- $$36. \sum \frac{a^2}{b+c} = \frac{2p(p^2 - 3r^2 - 4Rr)}{p^2 + r^2 + 2Rr}.$$
- $$37. \sum \frac{b^2 + c^2 - a^2}{b+c} = \frac{p^4 + 8r^2p^2 - r^2(4R+r)^2}{p(p^2 + r^2 + 2Rr)}.$$

„Între ceea ce știi și ceea ce nu știi
este ceea ce presupui.”

§ 2.1. Identități remarcabile cu raze

$$1. \sum r_a = 4R + r.$$

$$2. \sum r_b r_c = p^2.$$

$$3. r_a r_b r_c = rp^2.$$

$$4. \sum r_a^2 = (4R + r)^2 - 2p^2.$$

$$5. \sum r_a^3 = (4R + r)^3 - 12Rp^2.$$

$$6. \sum \frac{1}{r_a} = \frac{1}{r}.$$

$$7. \sum \frac{1}{r_a^2} = \frac{p^2 - 2r^2 - 8Rr}{r^2 p^2}.$$

$$8. r_b + r_c = \frac{2p(p-a)}{h_a}.$$

$$9. r_b r_c = p(p-a).$$

$$10. r_a - r = \frac{2(p-b)(p-c)}{h_a}.$$

$$11. rr_a = (p-b)(p-c).$$

$$12. \sum \frac{1}{r_b + r_c} = \frac{p^2 + (4R + r)^2}{4Rp^2}.$$

$$13. \sum \frac{r_b r_c}{r_b + r_c} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R}.$$

$$14. \sum \frac{r_a}{r_b + r_c} = \frac{(4R + r)^3 + p^2(r - 8R)}{4Rp^2}.$$

$$15. \sum \frac{r_b + r_c}{r_a} = \frac{2(2R - r)}{r}.$$

$$16. \sum \frac{r_a - r}{r_a + r} = \sum \frac{a}{b+c} = \frac{2(p^2 - r^2 - Rr)}{p^2 + r^2 + 2Rr} \geq \frac{3}{2}.$$

17. $\prod(r_b + r_c) = 4Rp^2.$

18. $\sum ar_a = 2p(2R - r).$

19. $\sum a^2 r_a = 4p^2(R - r).$

20. $\sum ar_b r_c = 2rp(4R + r).$

21. $\sum bcr_b r_c = p^2(p^2 + r^2 - 8Rr).$

22. $\sum \frac{2R - r_a}{bc} = \frac{1}{2R}.$

23. $\sum \frac{2R - r_a}{b^2 c^2} = \frac{p^2 - 4R^2 - Rr}{4R^2 r p^2}.$

24. $\sum \frac{2R - r_a}{a} = \frac{p^2(2R - r) - r(8R^2 + 6Rr + r^2)}{4Rrp}.$

25. $\sum \frac{1}{2r_a - r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{4p^2 - r^2 - 16Rr}{4p^2 + r^2 + 8Rr}.$

26. $\sum r_a(r_b + r_c) = 2p^2.$

27. $\sum r_a(r_b + r_c)^2 = 4p^2(R + r).$

28. $\sum \frac{(r_b + r_c)^2}{r_a} = 4\left(1 + \frac{R}{r}\right).$

29. $\sum \frac{r_a}{bc} = \frac{2R - r}{2Rr}.$

30. $\sum \frac{bc}{r_a} = \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{r}.$

31. $\sum \frac{ar_a}{bc} = \frac{p(R - r)}{Rr}.$

32. $\sum \frac{a^2}{r_b r_c} = \frac{4(R - r)}{r}.$

33. $\sum \frac{bc}{r_b + r_c} = \frac{p^2 + (4R + r)^2}{p^2}.$

34. $\sum \frac{r_b r_c}{bc} = \frac{4R + r}{2R}.$

35. $\sum \frac{r_b r_c}{ar_a} = \frac{p(p^2 + r^2 - 12Rr)}{4Rr^2}.$

36. $\sum \frac{r_b r_c}{a} = \frac{p(p^2 + r^2 - 8Rr)}{4Rr}.$

37. $\sum \frac{a}{r_b r_c} = \frac{2(2R - r)}{rp}.$

38. $\sum (p - a)r_a^2 = rp(4R + r).$

40. $\sum \frac{(p - b)(p - c)}{ar_a} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4Rp}.$

39. $\sum \frac{p(p - a)}{r_b r_c} = 3.$

41. $\sum \frac{ar_a}{(p - b)(p - c)} = \frac{2p}{r}.$

42. $\sum \frac{r_a^2}{(p - b)(p - c)} = \frac{4R + r}{r}.$

Identitățile lui TOSCANO

43. $\frac{1}{r^2} - \sum \frac{1}{r_a^2} = \frac{2r(4R + r)}{S^2}.$